数理解析研究所講究録
1119巻 1999年 146-157

Hilbert空間の正則化「球面」Laplacianと無限次元代数

信大　工学系研　　田邉　伸彦(Nobuhiko Tanabe)

第0節.　概要

Hilbert 空間あ h 無限次元なので、そこでの Laplacian$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ は距離関数 $r(x) = \sqrt{\sum x_n^2}$ に対しても定義できない。また、極座標表示もできない。従ってなんらかの意味での正則化を定義しそれに基づいた計算をおこなうことは意味がある。ここではHilbert空間をcompact多様体上の L^2- 空間 $L^2(X)$ とし、X 上の非退化楕円形作用素 D が $L^2(X)$ に指定されているものとして D の spectre zeta 関数を利用した Δ の正則化 : Δ : を提案しそれに関するいくつかの結果を報告する。

第1節-第3節ではせい正則化Laplacianの定義とそれに基づく極座標表示を与え更にその固有値、固有関数の計算結果を述べる。これについては以前にも報告したので詳しい計算は省略した。第4節-第5節では正則化「球面」Laplacian を角運動量演算子様演算子を用いて書き直す。そのために無限次元 Jordan 代数（の生成元）が必要になる。第6節ではここで導入されたJordan代数の性質を調べる。更に第7節で角運動量演算子様演算子を用いたBogoliubov変換を計算する。これらの結果の（物理的）意味や応用を調べるのは今後の課題である。

第1節.　Hilbert空間の極座標と正則化Laplacian

有限次元では

$$\Delta = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

であるが、これでは、$\Delta r(x)^2 (= \sum_{n=1}^{N} 2)$ が $N \to \infty$ において有限にならず定義できない。そこで、以下に定義するある固有値 λ_n を用いて意味のある無限次元 Laplacian を構築する。X を固定された Riemann 計量をもった compact (spin) manifold、E を X 上の Hermitian vector bundle とし、$L^2(X)$ を E の section の Hilbert 空間とする。$f \in L^2(X)$ の L^2 計量を $||f||$ と示す。それは X の Riemann 計量によって固定される。E の section に作用する非退化の一階自己随伴楕円（擬）微分作用素 D を考え、f の k-次 Sobolev 計量 $||f||_k$ を

$$||f||_k := ||D^k f|| \tag{2}$$

によって定める。E の section の k-次 Sobolev 空間は $W^k(X)$ によって示す。Sobolev の埋め込み定理によって、$W^k(X)$ は、d を X の次元とすると、$k > d/2$ のとき連続

な section の空間に含まれる。$L^2(X)$ の正規直交基底を $\{e_{\lambda_n}\}$, $n=1,2,\cdots$ とすると、D の spectre 分解 $\sum \lambda_n(\ ,e_n)e_n$ であり、すなわち、$De_n=\lambda_n e_n$ である。$e_{n,k}=\lambda_n^{-k}e_n$ と書くと、これらは $W^k(X)$ の正規直交基底になる。

$L^2(X)$ の座標を $x=(x_1,x_2,\cdots)=\sum x_n e_n$、$W^k(X)$ の座標を $y=\sum y_n e_{n,k}$ をとる。このとき、$x\in W^k(X)$ を $L^2(X)$ の座標で書くと $x=\sum x_{n,k}e_{n,k}=\sum x_n e_n$ であるので、$x_{n,k}e_{n,k}=x_n e_n$ を得る。だから、$x_{n,k}=\lambda_n^k x_n$ となる。$W^k(X)$ の Laplacian $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_{n,k}^2}$ を $L^2(X)$ の座標で書くと

$$\frac{\partial}{\partial x_{n,k}}=\frac{\partial x_n}{\partial x_{n,k}}\frac{\partial}{\partial x_n}=\lambda_n^{-k}\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3}$$

から

$$\sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_{n,k}^2}=\sum_n \lambda_n^{-2k}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{4}$$

となる。だから、$L^2(X)$ の関数に働く operator $\Delta(s)$ を

$$\Delta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2s}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{5}$$

で定義する。$L^2(X)$ の関数 f に対し Re s が大きいとき $\Delta(s)f$ が存在し、s の解析関数として $s=0$ まで解析接続されれば

$$:\Delta:f=\text{value of }\Delta(s)f\text{ at }s=0 \tag{6}$$

と定義する。

例 1:

$$\begin{aligned}&\Delta(s)r(x)^2=2\zeta(D^2,s),\\&\zeta(D^2,s)=\sum(\lambda_n^2)^{-s}=\sum\lambda_n^{-2s}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\nu:=\zeta(|D|,0) \tag{8}$$

という spectral zeta function$\sum\lambda_n^{-s}$ の $s=0$ への解析接続した値が有限値をとることが分かっている。そこで、

$$:\Delta:r(x)^2=2\zeta(D^2,0)=2\nu\ (\nu=\zeta(D^2,0)). \tag{9}$$

同様に、$\Delta(s)r(x)^p=\sum\lambda_n^{-2s}pr^{p-2}+\sum\lambda_n^{-2s}p(p-2)r^{p-4}x_n^2$ から

$$:\Delta:r(x)^p=\nu pr^{p-2}+p(p-2)r^{p-2}=p(p+\nu-2)r^{p-2} \tag{10}$$

となる。

(6) を極座標表示にしよう。有限次元の N 次元における球座標は

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \qquad \cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1} \\ x_N = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{N-1} \end{cases} \tag{11}$$

である。ただし、$0 \leq \theta_i \leq \pi (i = 1, 2, \cdots, n-2), 0 \leq \theta_{N-1} \leq 2\pi$。この球座標を無限次元球座標にするには最後の角（経度）が存在せずすべての角が $0 \leq \theta_i \leq \pi (i = 1, 2, \cdots, \infty)$ の範囲となる。そこで、

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \qquad \cdots \\ x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n \\ \qquad \cdots \end{cases} \tag{12}$$

と書き、r は $(x_1, x_2, \cdots)$ に渡るので Hilbert 空間として定義される。すなわち、

$$r := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} \tag{13}$$

でもって定義する。この座標系では

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2(1 - \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_n) \tag{14}$$

となるので、

$$\lim_{n\to\infty} \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n = 0 \tag{15}$$

がこの座標系が満たすべき条件であり、経度がないことによる付加条件と考えられる。有限次元でもそうであったように無限次元でも

$$r_k := \sqrt{\sum_{n=k}^{\infty} x_n^2},\ r_1 := r \tag{16}$$

を用いると便利である。このとき、sin や cos は無限次元でも

$$\sin\theta_k = \frac{r_{k+1}}{r_k},\quad \cos\theta_k = \frac{x_k}{r_k} \tag{17}$$

となる。さらに、

$$r_k = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{k-1},\ k = 2, 3, \cdots \tag{18}$$

という性質も持つ。

空間反転 $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ は有限次元同様すべての角 θ_n を $\theta_n - \pi$ と変換すればよい。

(12) から $\theta_m = \theta_m(x_m, x_{m+1}, \ldots)$ なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_n} &= \frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_m \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial \theta_m} \\
&= \frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{m(\leq n)} \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial \theta_m}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

さらに、$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ は $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{m(\leq n)} \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial x_n}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_m^2} + 2\sum_{m=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial \theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta_m} + \sum_{m(\leq n)}\sum_{m'(\leq n)} \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial \theta_{m'}}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial \theta_m}\frac{\partial}{\partial \theta_{m'}} + \sum_{m(\leq n)} \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial \theta_m}$ となるが、これに λ_n^{-2s} をかけて n について和をとるときれいになる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\bigg|_{s=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} \Bigg\{ \left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial r} + \\
&\quad \sum_{m(\leq n)} \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial x_n}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_m^2} + \sum_{m(\leq n)} \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial \theta_m} \Bigg\}\Bigg|_{s=0}
\end{aligned} \tag{20}
$$

(13),(17) から

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial x_n} = \frac{x_n}{r}, \ \frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_n^2}{r^3} \\
&\frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} = -\frac{r_{m+1}}{r_m^2}(n = m), \ \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} = \frac{x_m x_n}{r_m^2 r_{m+1}}(n > m) \\
&\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_n^2} = -\frac{2x_m r_{m+1}}{r_m^4}(n = m), \\
&\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_n^2} = \frac{x_m}{r_m^2 r_{m+1}} - \frac{2x_m x_n^2}{r_m^4 r_{m+1}} - \frac{x_m x_n^2}{r_m^2 r_{m+1}^3}(n > m)
\end{aligned} \tag{21}
$$

であるので、(6) に注意して (21) を (20) に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\Delta[\nu] \\
&:= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu - 1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\sum_n \frac{1}{\sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-1}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_n^2} + (\nu - n - 1)\frac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{\partial}{\partial \theta_n} \right\},
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\Lambda[\nu] := \sum_n \frac{1}{\sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-1}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_n^2} + (\nu - n - 1)\frac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{\partial}{\partial \theta_n} \right\} \tag{23}
$$

が得られる。$\nu = N$ とおけば最後の角の部分がない事を除いて有限次元のものと同じになる。

第2節. Hilbert空間の球関数

Hilbert 空間における Laplacian が $\psi \in L^2(X)$ に作用するとき、その固有値を λ とすると、

$$-:\Delta:\psi = \lambda\psi. \tag{24}$$

ここで、$\psi = R(r)\Theta(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ と動径と角度に変数分離すると次の二つの微分方程式

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\nu-1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0 \tag{25}$$

$$\Lambda\Theta + \mu\Theta = 0 \quad (\mu \ : \ \text{constant}) \tag{26}$$

を得る。更に $\Theta(\theta_1, \theta_2, \cdots) = T_1(\theta_1)T_2(\theta_2)\cdots$ と変数分離し少し整理すると、

$$\begin{aligned}0 = \mu\sin^2\theta_1 \quad &+ \quad \frac{\sin^2\theta_1}{T_1}\left\{\frac{d^2T_1}{d\theta_1^2} + (\nu-2)\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\frac{dT_1}{d\theta_1}\right\} \\ &+ \quad \frac{1}{T_2}\left\{\frac{d^2T_2}{d\theta_2^2} + (\nu-3)\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\frac{dT_2}{d\theta_2}\right\} \\ &+ \quad \frac{1}{T_3\sin^2\theta_2}\left\{\frac{d^2T_3}{d\theta_3^2} + (\nu-4)\frac{\cos\theta_3}{\sin\theta_3}\frac{dT_3}{d\theta_3}\right\} + \cdots\end{aligned} \tag{27}$$

と書ける。見て分かるように第一行は θ_1 のみを含み、この行以外は θ_1 を含まない。そこで第一行を定数 a_1 と置く。さらに、第一行を定数 a_1 と置いた式の両辺に $\sin^2\theta_2$ を掛けると (27) と同様な式が得られ、上と同様なことを行うと、

$$\begin{aligned}&\sin^{-\nu+2}\theta_1\frac{d}{d\theta_1}\left(\sin^{\nu-2}\theta_1\frac{dT_1}{d\theta_1}\right) + \left(a_0 - \frac{a_1}{\sin^2\theta_1}\right)T_1 = 0 \\ &\sin^{-\nu+3}\theta_2\frac{d}{d\theta_2}\left(\sin^{\nu-3}\theta_2\frac{dT_2}{d\theta_2}\right) + \left(a_1 - \frac{a_2}{\sin^2\theta_2}\right)T_2 = 0 \\ &\qquad\cdots \\ &\sin^{-\nu+n+1}\theta_n\frac{d}{d\theta_n}\left(\sin^{\nu-n-1}\theta_n\frac{dT_n}{d\theta_n}\right) + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{\sin^2\theta_n}\right)T_n = 0 \\ &\qquad\cdots.\end{aligned} \tag{28}$$

ただし、$a_0 = \mu$ である。計算上、上の式の第 n 番目を $\omega_n = \cos\theta_n$ とおいた

$$(1-\omega_n^2)\frac{d^2T_n}{d\omega_n^2} - (\nu-n)\omega_n\frac{dT_n}{d\omega_n} + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{1-\omega_n^2}\right)T_n = 0 \tag{29}$$

は有用である。a_n を

$$a_n = l_n(l_n+\nu-n-2), \ l_n \geq 0 \tag{30}$$

とおく。このとき T_n の解は定数を除いて形式的に

$$\left\{\begin{array}{l}(1-\omega_n^2)^{-(l_n+\nu-n-2)/2}C_{l_n-l_{n-1}-1}^{-l_n+(n+3-\nu)/2}(\omega_n) \\ (1-\omega_n^2)^{-(l_n+\nu-n-2)/2}C_{l_n+l_{n-1}+\nu-n-2}^{-l_n+(n+3-\nu)/2}(\omega_n) \\ (1-\omega_n^2)^{l_n/2}C_{l_{n-1}-l_n}^{l_n+(\nu-n-1)/2}(\omega_n) \\ (1-\omega_n^2)^{l_n/2}C_{n+1-l_n-l_{n-1}-\nu}^{l_n+(\nu-n-1)/2}(\omega_n)\end{array}\right. \tag{31}$$

と書ける。ただし、$C_l^{\lambda}(\omega)$ において l は 0 以上の整数で、$\lambda \in R$ である。

第 3 節. 諸定理等

命題 3.1 $\{(\theta_1, \theta_2, \ldots) |\ 0 \le \theta_n \le \pi\}$ 上で考えた作用 $\Lambda[\nu]$ は

$$\Theta(\theta_1, \theta_2, \ldots) = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{N-1}) \times \prod_{n \ge N} (\sin\theta_n)^{l_\infty} \left(1 + a_n \int_0^{\theta_n} (\sin)^{n+1-\nu-2l_\infty} dx\right), \tag{32}$$

の形の無限に多くの独立な固有関数をもつとそれに属する固有値 $-l(l+\nu-2)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ をもち、そこでの l_∞ は $l \ge l_\infty \ge 0$ を満たす整数であり、$\{a_n\}$ は $\sum \left|\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right| < \infty$ を満たす。

系 3.1 $\Lambda[\nu]$ は $\nu < 1$ のとき定値作用素ではない。

$r = 1$, $\{(\theta_1, \theta_2, \ldots) |\ 0 \le \theta_n \le \pi\}$ をとることは、$\{(x, x_\infty) |\ ||x|| = 1,\ 0 \le x_\infty \le 1\} \subset H_{l_g}$ への写像を意味する。$S_c^\infty = \{(x, c) |\ ||x||^2 = 1 - c^2\} \subset H_{l_g}$, $0 \le c < \sqrt{2}/2$ とする。この時、$\Lambda[\nu]$ は S_c^∞ 上の作用素 $\Lambda_c = \Lambda[\nu]_c$ を導く。Λ_0 は本来（H）の球 Laplacian である。I の補題と命題によって、

定理 3.1 すべての Λ_c は共通の固有値 $-l(l+\nu-2)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ をもつ。すべての固有値は固有関数 $\Theta_c(\theta_1, \theta_2, \ldots)$;
$\Lambda_c \cdot \Theta_c = l(l+\nu-2)\Theta_c$, $c \ge 0$, $\Theta_c \ne 0$ の無限に多くの独立な $1-$ parameter の族をもつ。$l \ge 1$ のとき、固有値 $l(l+\nu-2)$ は

$$\Lambda_c \Phi_c = l(l+\nu-2)\Phi_c,\ \Phi_c \ne 0,\ c \ne 0,\ \Phi_0 = 0 \tag{33}$$

を満たす固有関数 Φ_c の無限に多くの独立な $1-$ parameter の族をもつ。

ν が $\nu \le 1$ である整数のとき、

$$\Lambda_c \Psi_c = 0,\ \Psi_c \ne 0,\ c \ne 0,\ \Psi_0 = 0 \tag{34}$$

を満たす固有関数 Ψ_c の無限に多くの独立な $1-$ parameter の族が存在する。

第 4 節. Hilbert 空間上の ∇ と極座標表示の Laplacian

角運動量の定義 $\hat{J}_{nm} = x_n \hat{p}_m - x_m \hat{p}_n$ から出発して、$-\Delta[\nu] = \hat{p}_r^2 + \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-2s} \hat{J}_{n,n+1}^2$ とすると $\sum_{n=1}^\infty \hat{J}_{n,n+1}^2 |_{s=0}$ は

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-2s} \hat{J}_{n,n+1}^2 |_{s=0}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} \left\{ \frac{x_{n+1}^2}{r_{n+1}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_n^2} + \frac{x_n^2 r_{n+2}^2}{r_{n+1}^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta_{n+1}^2} \right. \tag{35}$$

$$- \frac{2\cos\theta_n \sin\theta_{n+1} \cos\theta_{n+1}}{\sin\theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_{n+1}} + \frac{\sin\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_{n+1}}$$

$$\left. + \frac{\cos\theta_n \sin^2\theta_{n+1}}{\sin\theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \right\} \tag{36}$$

となるので、前に導出した $-\Delta[\nu] = \hat{p}_r^2 + \frac{1}{r^2}\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ の形の $\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ のものとは明らかに違う。そこで、計算の困難な $\hat{J}_{nm} = x_n \hat{p}_m - x_m \hat{p}_n$ を扱うのではなく、$-\Delta[\nu] = \hat{p}_r^2 + \frac{1}{r^2}\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ から出て来る $\hat{\ell}(s)$ に注目することにする。

今、$\sum_n \lambda_n^{-2s} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ の形から違う n 同士が混ざりあうことがないので、∇ を次の式で定義する。ただし、後で $s = 0$ へ解析接続するもとする。

$$\nabla(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{37}$$

ここでの $\{E_n\}_I$, $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は次の性質を持つものとする。

$$E_n \cdot E_m = E_m \cdot E_n = \delta_{nm} 1_E \tag{38}$$

このことから、この $\{E_n\}_I$ は

$$\begin{aligned} E_n \cdot E_m &= E_m \cdot E_n \\ E_l \cdot (E_m \cdot E_n) &\neq (E_l \cdot E_m) \cdot E_n \end{aligned} \tag{39}$$

を満たすので、非結合代数の中のベキ結合代数である、すなわち $E_l^2 \cdot (E_m \cdot E_n) = (E_l^2 \cdot E_m) \cdot E_n$ を満たす、Jordan 代数である。ただし、前に出てきた $\{e_n\}_{n \in I}$ を Clifford 代数と定義すると、この $\{E_n\}_I$ は

$$E_n \cdot E_m = \frac{1}{2}(e_n \cdot e_m + e_m \cdot e_n) \tag{40}$$

と表現できる。

第 5 節.　角運動量演算子様演算子の導出

$\hat{\ell}(s)^2$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \hat{\ell}(s)^2 &= -1_E r^2 \sum_n \sum_m^n \lambda_n^{-2s} \left\{ \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_m^2} + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \right\} \\ &= -r^2 \left\{ \left(\sum_n \sum_m^n \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \sum_{nn'}\sum_{m'}^{n'} \lambda_n^{-s}\lambda_{n'}^{-s}(E_nE_{n'})\frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial^2\theta_{m'}}{\partial r\partial x_{n'}}\frac{\partial}{\partial\theta_{m'}}\Bigg\} \\
= & -r^2\Bigg\{\sum_{nn'}\sum_{m'}^{n'}\sum_{m}^{n}\lambda_n^{-s}\lambda_{n'}^{-s}(E_nE_{n'})\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial\theta_m}\left(\frac{\partial\theta_{m'}}{\partial x_{n'}}\frac{\partial}{\partial\theta_{m'}}\right) \\
&\qquad + \sum_{nn'}\sum_{m'}^{n'} \lambda_n^{-s}\lambda_{n'}^{-s}(E_nE_{n'})\frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial^2\theta_{m'}}{\partial r\partial x_{n'}}\frac{\partial}{\partial\theta_{m'}}\Bigg\} \\
= & -r^2\Bigg\{\sum_{nn'}\sum_{m'}^{n'}\lambda_n^{-s}\lambda_{n'}^{-s}(E_nE_{n'})\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial\theta_{m'}}{\partial x_{n'}}\frac{\partial}{\partial\theta_{m'}}\right) \\
&\qquad - \sum_{nn'}\sum_{m'}^{n'} \lambda_n^{-s}\lambda_{n'}^{-s}(E_nE_{n'})\frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial\theta_{m'}}{\partial x_{n'}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta_{m'}}\Bigg\} \\
= & -r^2\sum_{nn'}\sum_{m'}^{n'}\lambda_n^{-s}\lambda_{n'}^{-s}(E_nE_{n'})\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial\theta_{m'}}{\partial x_{n'}}\frac{\partial}{\partial\theta_{m'}}\right) \qquad (41)
\end{aligned}
$$

最後の計算は (6) からである。更に変形すると、

$$
\begin{aligned}
&\hat{\ell}(s)^2 \\
&\quad = \left(\frac{r}{\sqrt{-1}}\sum_n \lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\frac{r}{\sqrt{-1}}\sum_n\sum_m^n \lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial\theta_m}\right) \\
&\quad = \hat{\tau}(s)^2 + \hat{\rho}(s)\hat{\tau}(s) \qquad (42)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau}(s) &:= \frac{r}{\sqrt{-1}}\sum_n\sum_m^n \lambda_n^{s-}E_n\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial\theta_m} \\
\hat{\rho}(s) &:= \frac{r}{\sqrt{-1}}\sum_n \lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (43)
\end{aligned}
$$

と置いた。左辺は $\{\theta_n\}_{n\in I}$ に関する微分なのに右辺には動径の微分が含まれている。だから $\hat{\rho}(s)\hat{\tau}(s)|_{s=0} = 0$ とならなければならない。このとき、

$$
\begin{aligned}
\hat{\ell}(s) &:= \hat{\tau}(s) \\
&= \frac{r}{\sqrt{-1}}\sum_n\sum_m^n \lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial\theta_m} \qquad (44)
\end{aligned}
$$

これで、角運動量演算子様演算子の成分 $\hat{\ell}_n(s)$ が

$$
\hat{\ell}_n(s) = \frac{r}{\sqrt{-1}}\sum_m^n \frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial\theta_m} \qquad (45)
$$

と求まる。

第6節. Jordan 代数 $\{E_A\}_{A\in I_0}$, $I_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ の性質

$\nabla(s)$ と $\hat{\ell}(s)$ が定義できたので、運動量演算子様演算子 $\hat{p}(0)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\nabla(0)$, $\hat{\ell}(0)$ を計算する。その際、次の２つの必要な $\hat{r}(s)$ と E_0 を定義する。

$$\hat{r}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} E_n x_n \tag{46}$$

$$\hat{r}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x_n =: E_0 r \tag{47}$$

前の $\{E_n\}_{n\in I}$, $I=\{1,2,3,\ldots\}$ とまとめて $\{E_A\}_{A\in I_0}$, $I_0=\{0,1,2,\ldots\}$ の性質は以下になる。

$$\begin{aligned}
& E_A\cdot(E_B\cdot E_C) \neq (E_A\cdot E_B)\cdot E_C,\\
& E_A^2\cdot(E_B\cdot E_C) = (E_A^2\cdot E_B)\cdot E_C,\\
& (E_A)^2 = 1_E,\\
& E_n\cdot E_m = E_m\cdot E_n = \delta_{nm}1_E,\\
& E_0\cdot E_n = E_n\cdot E_0 = \frac{x_n}{r}1_E,\\
& \frac{\partial E_A}{\partial r} = \frac{\partial E_n}{\partial x_n} = \frac{\partial E_n}{\partial \theta_n} = 0,\\
& \qquad E_0\cdot\frac{\partial E_0}{\partial \theta_n} = 0\\
& \qquad E_n\cdot\frac{\partial E_0}{\partial x_m} = \frac{\partial E_0}{\partial x_m}\cdot E_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{r}-\frac{x_n x_m}{r^3}\right)1_E & (m=n)\\ -\frac{x_n x_m}{r^3}1_E & (m\neq n)\end{cases}\\
& \qquad E_n\cdot\frac{\partial E_0}{\partial \theta_m} = \frac{\partial E_0}{\partial \theta_m}\cdot E_n = \begin{cases} \cot\theta_m \frac{x_n}{r}1_E & (m<n)\\ -\tan\theta_m\frac{x_n}{r}1_E & (m=n)\\ 0 & (m>n)\end{cases}
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-1}E_0\cdot[\hat{p}(s)]_{s=0} \qquad\qquad (49)\\
&= E_0\cdot\left[\sum_n \lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]_{s=0}\\
&= E_0\cdot\left[\sum_n \lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial r}{\partial x_n}\partial_r + \sum_n\lambda_n^{-s}\sum_{l=1}^{n}E_n\frac{\partial\theta_l}{\partial x_n}\partial_{\theta_l}\right]_{s=0}\\
&= E_0\cdot\left[\sum_n \lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial r}{\partial x_n}\partial_r + \sum_n\lambda_n^{-s}E_n\frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}\partial_{\theta_n} + \sum_n\lambda_n^{-s}\sum_{l<n}E_n\frac{\partial\theta_l}{\partial x_n}\partial_{\theta_l}\right]_{s=0}\\
&= E_0\cdot\left[\sum_n \lambda_n^{-s}E_n\frac{x_n}{r}\partial_r - \sum_n\lambda_n^{-s}E_n\frac{r_{n+1}}{r_n^2}\partial_{\theta_n} + \sum_n\lambda_n^{-s}\sum_{l<n}E_n\frac{x_l x_n}{r_l^2 r_{l+1}}\partial_{\theta_l}\right]_{s=0}\\
&= E_0\cdot\left\{\sum_n E_n\frac{x_n}{r}\partial_r - \sum_n E_n\frac{r_{n+1}}{r_n^2}\partial_{\theta_n} + \sum_n\sum_{l<n}E_n\frac{x_l x_n}{r_l^2 r_{l+1}}\partial_{\theta_l}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n (E_0 \cdot E_n) \frac{x_n}{r} \partial_r - \sum_n (E_0 \cdot E_n) \frac{r_{n+1}}{r_n^2} \partial_{\theta_n} + \sum_n \sum_{l<n} (E_0 \cdot E_n) \frac{x_l x_n}{r_l^2 r_{l+1}} \partial_{\theta_l} \\
&= \sum_n 1_E \frac{x_n^2}{r^2} \partial_r - \sum_n 1_E \frac{x_n r_{n+1}}{r r_n^2} \partial_{\theta_n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=l+1}^{\infty} 1_E \frac{x_l x_n^2}{r r_l^2 r_{l+1}} \partial_{\theta_l} \\
&= 1_E \partial_r
\end{aligned}
$$

同様に、$\sqrt{-1}E_n[\hat{p}(s)]_{s=0} = \sqrt{-1}1_E \frac{\partial}{\partial x_n}$ となる。$\hat{\ell}(0)$ の方は少し複雑で

$$
\sqrt{-1}E_0[\hat{l}(s)]_{s=0} = 0 \tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-1}E_n \cdot [\hat{l}(s)]_{s=0} \\
&\qquad = 1_E \begin{cases} -\dfrac{\sin\theta_n}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1}} \partial_{\theta_n} & (n=1) \\ \left(-\dfrac{\sin\theta_n}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1}} + \dfrac{\cos\theta_{n-1}\cos\theta_n}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}}\right) \partial_{\theta_n} & (n>1) \end{cases}
\end{aligned} \tag{51}
$$

第7節. 作用素 $\hat{\ell}_i$, $\hat{\ell}_i^*$ の Bogoliubov 変換

角運動量演算子様演算子の成分

$$
\hat{\ell}_n = \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_{m(\geq n)} \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \tag{52}
$$

に対する adjoint operator として

$$
\hat{\ell}_n^* = \frac{\sqrt{-1}}{r} x_n \tag{53}
$$

を考える。これは交換関係

$$
[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m^*] = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_n} \frac{\partial x_m}{\partial \theta_l} \tag{54}
$$

となるので、以下、球面上 (r 一定) で考える。このとき、次のような Boson の生成・消滅演算子の交換関係を満たす。

$$
\begin{aligned}
[\hat{\ell}_n^*, \hat{\ell}_m] &= \delta_{nm} \\
[\hat{\ell}_n^*, \hat{\ell}_m^*] &= 0 \\
[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m] &= 0
\end{aligned} \tag{55}
$$

$\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ の固有値は $l_0(l_0+\nu-2)$ であるが、この固有値と個々の $\hat{\ell}_n^2$ との関係が分かりづらい。そこで次のように Bogoliubov 変換によって $\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ を対角化する。

$$
\begin{cases} \hat{\alpha}_n := a\hat{\ell}_n - b\hat{\ell}_n^* \\ \hat{\alpha}_n^* := b\hat{\ell}_n + a\hat{\ell}_n^* \end{cases} \tag{56}
$$

このとき、

$$
\begin{aligned}
&[\hat{\alpha}_n^*, \hat{\alpha}_m] \qquad (57)\\
&= ab[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m] + a^2[\hat{\ell}_n^*, \hat{\ell}_m] - b^2[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m^*] - ab[\hat{\ell}_n^*, \hat{\ell}_m^*]\\
&= (a^2+b^2)\delta_{nm}
\end{aligned}
$$

$a^2+b^2=1$ とすると $[\hat{\alpha}_n^*, \hat{\alpha}_m] = \delta_{nm}$。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i^{-2s} \hat{\alpha}_n^* \hat{\alpha}_n \Big|_{s=0} \qquad (58)\\
&= \sum \lambda_n^{-2s} \left\{ ab\hat{\ell}_n^2 - ab(\hat{\ell}_n^*)^2 + a^2\hat{\ell}_n^*\hat{\ell}_n - b^2\hat{\ell}_n\hat{\ell}_n^* \right\}\Big|_{s=0}
\end{aligned}
$$

今、$a=\pm 1/\sqrt{2}$, $b=\pm 1/\sqrt{2}$(順不同) のとき、

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i^{-2s} \hat{\alpha}_n^* \hat{\alpha}_n \Big|_{s=0} \qquad (59)
$$

$$
= ab(\hat{\ell}(s)^2|_{s=0} + 1) + \frac{1}{2}\nu \qquad (60)
$$

このようにBogoliubov 変換による回転の角度が固定されている。

References

[1] Asada,A. : Hodge operators on mapping spaces, Group 21, Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras, 925-928, World Sci., 1997,
Hodge operators of mapping spaces, Local Study, BSG Proc. Grobal Ananysis, Differntial Geometry, Lie Algebras(1997), 1-10.

[2] Asada, A. : Clifford bundles on mapping spaces, to appear in Proc. Conf. Diff. Geometry and Applications, Brnno, 1998. Spectral invariants and geometry of mapping spaces, to appear.

[3] Asada,A. -Tanabe,N, : A remark on infinite dimensional Gaussian integral in a Sobolev space, J.Fac.Sci. Shinshu Univ., vol.32, No.2, 1997.

[4] Asada.A : Remarks on zeta-regularized determinant of differential operators, to appear.

[5] Connes, A. : Geomtry from the spectral point of view, Lett. Math. Phys., 34(1995), 203-238.

[6] Erdély,A.-Magnus,W.-Oberhettinger,F.-Tricomi,G. : Higher Transcendental Functions, II. McGraw, 1953.

[7] Gilkey, P. : The Geometry of Spherical Space Forms, World Sci., 1989.

[8] Killingback, T.P. : World sheet anomalies and loop geometry, Nucl. Phys.B288(1987), 578-588.

[9] Suzuki,A.T.-Schmidt,A.G.M. : Negative-dimensional integration revisited, J. Phys. A. Math. Gen. 31(1998), 8023-8039.

[10] Villenkin, N.J. : Special Functions and the Theory of Group Pepresatations, Transl. Math. Monograph, 21, Amer. Math. Soc. 1968.